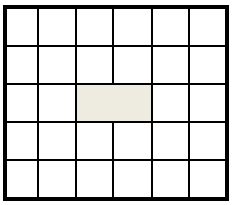
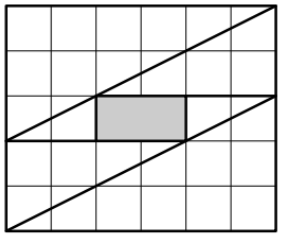
XII Открытая городская олимпиада по математике.

г. Пермь, 28 февраля 2021 года. 6 класс.

1. Из клетчатого прямоугольника 6х5 вырезали в центре прямоугольник 2х1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?



Решение: один из примеров разрезания показан на рисунке.



2. У директора школы Ивана Ивановича спешат часы. 1-го сентября ровно в полночь Иван Иванович поставил их правильно. 4-го сентября в полдень на часах было уже 13:00. Какое время показывали часы 1 сентября, когда на самом деле было 07:00, если они ни разу не показывали точного времени?

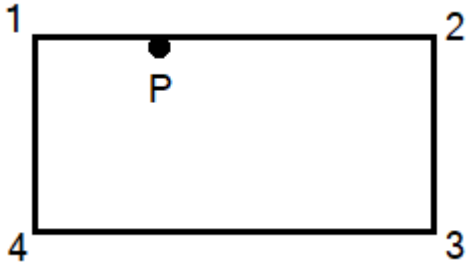
Ответ: 07:05.

Решение: С 00:00 1 сентября до 12:00 4 сентября проходит ровно 12·7=84 часа. За этот промежуток часы И.И. ни разу не показывали точное время, поэтому за 84 часа они «убежали» вперёд меньше, чем на 12 часов, а именно, на 1 час. Значит, за 7 часов они «убегут» вперёд на в 12 раз меньшее время, т.е. на 5 минут.

3. Аня, Боря, Вова и Гриша пришли в технопарк посмотреть на нового робота. Робот находится в прямоугольной площадке периметром 100 м, вход, в которую для посетителей запрещен. Ребята подошли к разным углам площадки и стали ждать, когда им удастся лучше рассмотреть робота. В какой-то момент робот подошел вплотную к границе площадки и остановился. Ребята в в это время пошли к нему кратчайшими путями. Аня прошла 15 м, Боря – 30 м, Вова – 20 м. А сколько метров прошел Гриша?

Ответ: *35 м.*

Решение: Пуст 1, 2, 3, 4 – номера углов площадки, в которых стоят ребята. Р – точка



на границе прямоугольной площадки, к которой подошёл робот (см. рис.). Расстояние от угла 1 до робота обозначим (1 – Р), от угла 2 до робота – (2 – Р), от угла 3 до робота – (3 – Р = 3 – 2 – Р), от угла 4 до робота – (4 – Р = 4 – 1 – Р). Сумма всех расстояний равна: (1 – Р) + (2 – Р) + (3 – 2 – Р) + (4 – 1 – Р), то есть периметру площадки. Таким образом, Гриша прошёл: 100 – 15 – 30 – 20 = 35 м.

4. Мальчики принесли в класс конфеты и раздали их девочкам. Петя сказал, что он принес ровно половину общего числа конфет. Коля сказал, что он принес ровно 1/3 от общего числа конфет и отдал свои конфеты только Маше и Тане, причем Маше досталось на три конфеты больше, чем Тане. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

   Решение: Предположим, что никто из ребят не ошибся. Если Петя не ошибся, то общее число принесённых конфет чётно (в два раза больше конфет, принесённых Петей). Т.к. Коля принёс целое количество конфет и это треть чётного числа, то он принёс чётное число конфет. Но, по его словам, он отдал девочкам нечётное количество конфет, т. к. количества конфет, доставшихся Маше и Тане, имеют разную чётность (они различаются на три), а сумма двух чисел разной чётности нечётна. Получили противоречие.

5. Петя умножил пятизначное число на сумму его цифр. Потом он умножил результат на сумму его (результата) цифр. Удивительно, но опять получилось пятизначное число. Каким могло быть исходное число? Перечислите все возможные варианты.

   Ответ: 10000, 10001, 10010, 10100, 11000.
   Решение: Если сумма цифр исходного числа была не менее 3, то после первого умножения получилось либо более чем пятизначное число, чего быть не должно, либо пятизначное число, первая цифра которого не менее 4, либо пятизначное число, первая цифра которого равна 3, но есть хотя бы еще одна ненулевая цифра (так как число 30000 может получиться умножением на 3 или больше только одного пятизначного числа – 10000, но у этого числа сумма цифр равна 1). Следовательно, у получившегося числа сумма цифр не менее 4, а первая цифра не менее 3, следовательно,

при втором умножении получится более чем пятизначное число. Отсюда сумма цифр исходного числа равна 1 или 2. Проверяем все такие числа 10000, 10001, 10010, 10100, 11000 и 20000 и убеждаемся, что подходят все, кроме последнего.

XII Открытая городская олимпиада по математике.
г. Пермь, 28 февраля 2021 года. 7 класс.

1. Шпунтик и Винтик сели рисовать котиков. Шпунтик рисует котиков в 1,5 раза быстрее, но он торопится на олимпиаду, поэтому у него в два раза меньше времени, чем у Винтика. Всего они нарисовали 28 котиков. Определите, сколько всего котиков нарисовал Винтик.

   Ответ: 16 котиков

   Решение: Допустим, Винтик нарисовал □ котиков. Если бы Шпунтик не торопился на олимпиаду, то он нарисовал бы в 1,5 раза больше котиков, чем Винтик: 1,5□. Но работал он в два раза меньше времени, значит, нарисовал 1,5□/2 котиков, а вместе с Винтиком — 28. Получаем уравнение: 1,5□/2 + □ = 28, и □ = 16. Винтик нарисовал 16 котиков, а Шпунтик — 12

2. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{100..00}_{2021\text{нулей}} - 2021$.

   Ответ: 18185.

   Решение. $1\underbrace{00...00}_{2021\text{нулей}} - 2021 = \underbrace{99...9}_{2017}7979$. В разности 2019 девяток и две семёрки. Сумма цифр равна $2019 \cdot 9 + 14 = 18185$.

3. Даны три натуральных числа. Для каждых двух из них вычислили наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Полученные шесть чисел сложили. Могло ли получиться число 12345?

   Ответ: нет

   Решение: Заметим, что НОД и НОК четных чисел число чётное, а нечётных – нечётное. НОД четного и нечётного чисел – нечётное число, и их НОК – чётное число. Перебирая все случаи (три чётных числа; два чётных, одно нечётное; одно чётное, два нечётных; три нечётных), приходим к выводу, что сумма чисел, о которых говорится в условии задачи, чётна.

4. Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку. Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались неполитыми. Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все

цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки?

Ответ: 19 цветов.

Решение: Неполитыми осталось 10 цветов, значит, полито было 30 − 10 = 20 цветов. Рассмотрим последний политый Синеглазкой тюльпан. Так как всего тюльпанов 15, за этим тюльпаном идёт ещё 15 − 10 = 5 тюльпанов. Поэтому Незнайка сорвёт эти 5 тюльпанов и закончит рвать цветы как раз на последнем политом Синеглазкой тюльпане. Но это значит, что все остальные остальные политые цветы уцелели. То есть уцелело 20 – 1 = 19 цветов.

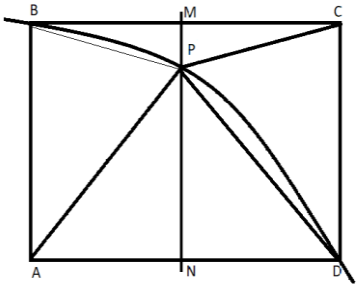
5. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

   Ответ: 1760 м

   Решение: Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а расстояние, пройденное к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Следовательно, до второй встречи каждый из паромов прошел втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 м, то до второй встречи он прошёл расстояние 720·3 = 2160 м. При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 м. Следовательно, ширина реки равна 2160 − 400 = 1760 м.

6. ABCD – квадрат. BD – дуга окружности с центром в точкеA радиуса AB. BM=MC, AN=ND. Найти ∟APC.

   Ответ: *135^0*



   Решение: Дополнительное построение отрезок DP, отрезокBP. Рассмотрим прямоугольные треугольники APN и DPN. Треугольник APN равен треугольнику DPN (N-середина AD, PN — общая), тогда AP=PD, следовательно треугольник APD равносторонний. ∟

PAN равен 60^0, тогда ⌞ BAP равен 30^0. Треугольник BAP равнобедренный, ⌞ ABP=⌞APB $\frac{180^0-30^0}{2}=75^0$, тогда ⌞ BPM=$180^0$-$75^0$-$30^0$=$75^0$. Треугольник BMP равен треугольнику CMP, ⌞ MPC=⌞ MPB=75^0.
Тогда ⌞ NPC=180^0-75^0=105^0 и ⌞ APC=⌞ APN+⌞ NPC=105^0+30^0=135^0.